Examen S1 : Systèmes Linéaires Multi-variables 01h :30

Exercice 1 (10 pts)

Considérons le système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

1. Quel est le type de système ?
2. Donner l'ordre de système
3. Vérifier la commandabilité par retour d'état de système
4. Calculer le gain de retour d'état **K** qui permet de stabiliser le système en boucle fermée sachant que le polynôme désiré en boucle fermée $P_{BF}(s) = s^2 + 5s + 6$
5. Vérifier l'observabilité de système
6. On suppose que l'état de système n'est disponible à la mesure. qu'est ce qu'on doit faire ?
7. Calculer le gain de retour de l'observateur **L** qui permet d'observer l'état de système en plaçant les pôles 5 fois plus rapide que le système en boucle fermée.

Exercice 2 (10 pts)

Considérons le système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1. Quel est le type de système ?
2. Donner l'ordre de système.
3. Vérifier la commandabilité par retour d'état de système.
4. Calculer le gain de retour d'état K en utilisant la méthode de placement des vecteurs et valeurs propres de façon à obtenir en boucle fermée les pôles : $\lambda_{1BF} = -1, \lambda_{2BF} = -2$ (Pour $\lambda_i = -1$, On pose $v_1 = 1$ $q_1 = 0$ et Pour $\lambda_2 = -2$, On pose $v_1 = 1$ $q_1 = 1$)

NB :

$$\det(A - \lambda I) = 0, W_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad W_{ecom} = \begin{bmatrix} B & AB & A^{n-1}B \end{bmatrix}, P_{A-BK}(s) = \det(SI - A + BK),$$

$$P_{A-LC}(s) = \det(SI - A + LC), \ \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & \ldots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ q_j \end{bmatrix} = 0$$

Correction

Exercice 1

1- Type de système mono variable (SISO). 01

2- L'ordre de système égal aux nombre des lignes ou des colonnes de la matrice d'état A, alors $n=2$. 01

3- La matrice de commadabilité par retour d'état

$$W_{ecom}=\begin{bmatrix} B & AB & A^{n-1}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 0.5

$$\det\left(W_{ecom}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=-1$$

01

$$\det\left(W_{ecom}\right)=-1\neq 0\Rightarrow rang\left(W_{ecom}\right)=2$$

$rang\left(W_{ecom}\right)=2=n$, Alors le système est commandable par retour d'état.

4- Calcul de K :

$$P_{A-BK}\left(s\right)=\det\left(SI-A+BK\right)=s^2+\left(k_2-1\right)s+\left(k_1-2\right)$$ 01

Par identification :

$$P_{A-BK}\left(s\right)=P_{BF}\left(s\right)\Rightarrow\begin{cases}\left(k_2-1\right)=5\\ \left(k_1-2\right)=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_2=6\\ k_1=8\end{cases}\Rightarrow K=\begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix}$$ 01

1.5

5- $W_{obs}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det\left(W_{obs}\right)=1\neq 0\Rightarrow rang\left(W_{obs}\right)=2=n$, Alors le système est observable.

6- Ajouter un observateur 01

7- Calcul de L :

$$P_{A-LC}\left(s\right)=\det\left(SI-A+LC\right)=s^2+\left(L_1-1\right)s+\left(L_2-L_1-2\right)$$ 01

$$P_{BF}\left(s\right)=s^2+5s+6=0\Rightarrow P_1=-2\,et\;P_2=-3$$

Pôles désirés 5 fois plus rapide : P_{L1}=-2*5=-10 et P_{L2}=-3*5=-15

$$P_{LBF}\left(s\right)=\left(s+10\right)\left(s+15\right)=s^2+25s+150$$ 01

Par identification :

$$P_{A-LC}\left(s\right)=P_{BF}\left(s\right)\Rightarrow\begin{cases}\left(L_1-1\right)=25\\ \left(L_2-L_1-2\right)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_1=26\\ L_2=178\end{cases}\Rightarrow L=\begin{bmatrix} 26 \\ 178 \end{bmatrix}$$ 01

Exercice 2

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

1- Type de système (MIMO). 01

2- L'ordre de système n=2 01

3- La matrice de commadabilité par retour d'état

$$W_{ecom} = \begin{bmatrix} B & AB & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 01

4- $\det\left(W_{ecom} \times W_{ecom}^{T}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ Alors le système est commandable par retour d'état. 01

5- Méthode de placement des vecteurs et valeurs propres :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ q_j \end{bmatrix} = 0$$

On a 2 variables d'état alors $i = 2$ et 2 entrées alors $j = 2$

Pour $\lambda_i = -1$

$$\begin{bmatrix} A + I & & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + q_1 + q_2 = 0 \end{cases}$$

On pose $v_1 = 1 \quad q_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2 \\ q_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 02

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} A + 2I & & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + 3v_2 + q_1 + q_2 = 0 \end{cases}$$

On pose $v_1 = 1 \quad q_1 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = -3 \\ q_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$ 02

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$K = -QV^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$ 02