Travaux dirigés Systèmes linéaires multivariables

1.0

Master 1 Automatique

Dr. Abdelkader Merah

30/12/2019

Table des matières

Commande par retour d'état des systèmes multivariables (SM)

I

A. Exercices d'application

1. Exercice 1

Considérant le système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

Que l'on cherche à le stabilisé par retour d'état. Chercher K de telle façon que le polynome caractéristique en boucle fermée $\psi_{d,BF}(s)=s^3+6s^2+13s+20$

Solution

Ici on utilise la méthode directe parce que les système matricielle contient beaucoup des zéros

$$det(SI-(A-BK))=\psi_{d,BF}(s) \Rightarrow det\left(\begin{pmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{pmatrix}\right)=det\begin{pmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ k_0 & k_1 & s+1+k_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(SI-(A-BK))=s^3+(k_2+8)s^2+(17+k_1+7k_2)s+(k_0+5k_1+10k_2+10)=\psi_{d,BF}(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2+8=6 \\ 17+k_1+7k_2=13 \\ k_0+5k_1+10k_2+10=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=-2 \\ k_1=10 \\ k_0=-20 \end{cases} \Rightarrow \quad K=[-20\ 10\ -2]$$

2. Exercice 2

Considérant le système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}u$$

Que l'on cherche à le stabilisé par retour d'état .Chercher K de telle façon que le polynome caractéristique en boucle fermée ait pour racines −1, −1−2j , −1+2j .

Solution

Ici est difficile d'utiliser la méthode directe, parce que les système matricielle ne contient pas beaucoup des zéros. alors on utilise la méthode indirecte

on commence par la vérification de commandabilité de système

$$We_{com}=[B \quad AB \quad A^2B]=\begin{pmatrix} 2 & 15 & 24 \\ 3 & 6 & 129 \\ -1 & 15 & -33 \end{pmatrix}$$

$$det(We_{com})=-3492\neq 0 \rightarrow rang(We_{com})=3=n$$

Alors le système est commandable par retour d'état

Maintenant on va récris le système sous la forme compagne de commande

L'équation caractéristique de système on boucle ouverte

$$det(sI-A)=det\begin{pmatrix} s-1 & -4 & 1 \\ -6 & s+1 & -3 \\ -2 & -2 & s+5 \end{pmatrix}=s^3+5s^2-29s-129=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

Alors la forme compagne de la commande est :

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} x+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \Rightarrow \dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 129 & 29 & -5 \end{pmatrix} x+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Se qui donne :

$$A_c=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 129 & 29 & -5 \end{pmatrix} \qquad B_c=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de système on boucle fermée :

$$\psi_{d,BF}(s)=(s-(-1))(s-(-1-2j))(s-(-1+2j))=s^3+3s^2+7s+5=s^3+\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0$$

Se qui donne :

$$\begin{cases} k_{c0}=\alpha_0-a_0 \\ k_{c1}=\alpha_1-a_1 \\ k_{c2}=\alpha_2-a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{c0}=5-(-129) \\ k_{c1}=7-(-29) \\ k_{c2}=3-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{c0}=134 \\ k_{c1}=36 \\ k_{c2}=-2 \end{cases} \Rightarrow K_c=[134 \quad 36 \quad -2]$$

Maintenant on calcul la matrice de passage

$$\begin{cases} We_{com}=[B \quad AB \quad A^2B]=\begin{pmatrix} 2 & 15 & 24 \\ 3 & 6 & 129 \\ -1 & 15 & -33 \end{pmatrix} \\ We\acute{c}_{com}=[B_c \quad A_cB_c \quad A_c^2B_c]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 54 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$T^{-1}=(We_{com}^{-1}\times Wec_{com})=\begin{pmatrix} 0.6108 & -0.2448 & -0.5129 \\ 0.0086 & 0.0120 & 0.0533 \\ -0.0146 & 0.0129 & 0.0095 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 54 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.5129 & 2.3196 & -25.8608 \\ 0.0533 & -0.2543 & 2.8247 \\ 0.0095 & -0.0344 & 0.4313 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule la matrice de retour d'état K

$$K=K_c\times T^{-1}=[134 \quad 36 \quad -2]\begin{pmatrix} -0.5129 & 2.3196 & -25.8608 \\ 0.0533 & -0.2543 & 2.8247 \\ 0.0095 & -0.0344 & 0.4313 \end{pmatrix}=[1.4227 \quad -0.9416 \quad 2.0206]$$

3. Exercice 3

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Calculer le retour d'état K permettant d'avoir en boucle fermée les pôles : −1, −2, −3, −4

Solution

On a un système multi-variables avec trois entrées et deux sorties, alors on utilise la méthode de placement des valeurs et vecteurs proores

Pour le pôle (-1)

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_1 I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$on\ pose \quad v_1 = 0.2212\,,\, v_2 = -0.7747\,,\, v_3 = 0.5820$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_4 = 0.1108 \\ q_1 = 2.1192 \\ q_2 = 0.0410 \\ q_3 = 1.0945 \end{cases}$$

Pour le pôle (-2)

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_1 I & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=0$$

$$on\ pose\quad v_1=-0.1309\,,\ v_2=-0.7809\,,\ v_3=0.4723$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_4=-0.3874 \\ q_1=7.0206 \\ q_2=-0.3604 \\ q_3=4.0871 \end{cases}$$

Pour le pôle (-3)

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_3 I & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=0$$

$$on\ pose\quad v_1=-0.7144\,,\ v_2=-0.2890\,,\ v_3=-0.2317$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_4=0.5937 \\ q_1=0.5658 \\ q_2=0.0794 \\ q_3=0.9814 \end{cases}$$

Pour le pôle (-4)

$$[A-\lambda_4 I \quad B]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=0$$

$$on\ pose \quad v_1=0.3780\,,\, v_2=-0.4911\,,\, v_3=-0.7798$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_4=-0.0887 \\ q_1=-1.5448 \\ q_2=1.4596 \\ q_3=-1.1441 \end{cases}$$

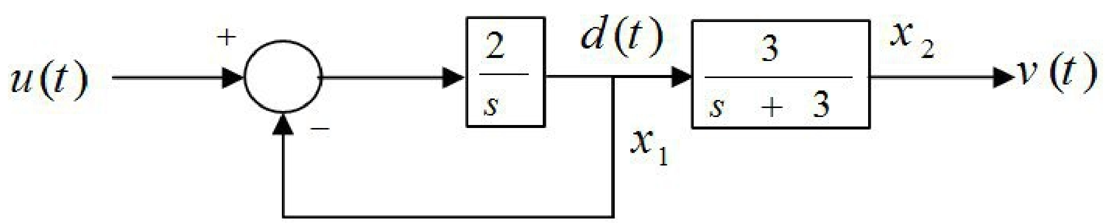
Finalement :

$$K=-QV^{-1}=-\begin{pmatrix} 2.1192 & 7.0206 & 0.5658 & -1.5448 \\ 0.0410 & -0.3604 & 0.0794 & 1.4596 \\ 1.0945 & 4.0871 & 0.9814 & -1.1441 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2212 & -0.1309 & -0.7144 & 0.3780 \\ -0.7747 & -0.7809 & -0.2890 & -0.4911 \\ 0.5820 & 0.4723 & -0.2317 & -0.7798 \\ 0.1108 & -0.3874 & 0.5937 & -0.0887 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$K=\begin{pmatrix} 5.4607 & 3.5065 & -2.2744 & 6.4373 \\ -0.8675 & 0.5903 & 1.1305 & -0.4490 \\ 3.8823 & 2.0606 & -1.2834 & 3.5207 \end{pmatrix}$$

4. Exercice 4

Soit le système composé d'un accélérateur de vitesse qui commande un véhicule ou la commande u(t) représente la vitesse désirée, d est la position et vt la vitesse actuelle.



Accélérateur de vitesse

1. Donner l'équation d'état et de système en choisissant x1(t)=d(t) , x 2(t)=v(t)
2. On désire estimer la vitesse v(t) et la position d(t) , on utilise un observateur qui possède les performances: dépassement Mp%=49% et le

temps de réponse Te(5%)=0.7413

- Est-ce-que l'observateur est réalisable ?
- Déterminer cet observateur.

Solution

- La représentation d'état de système

$$\begin{cases} x_1 = d \\ x_2 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{s}(u - x_1) \\ x_2 = \dfrac{3}{s+3} x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

- L'observateur est réalisable si le système est observable

$$W_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$det(W_{obs}) = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(W_{obs}) = 2 = n$$

Alors l'observateur est réalisable

- Détermination de l'observateur (Calcul de gain de l'observateur)

$$\begin{cases} Mp = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,49 \\ T_r = \dfrac{3}{\xi w_n} = 0,7413 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,861 \\ w_n = 4,7 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi w_n \pm j\, w_n \sqrt{1-\xi^2} = -4 \pm j2,4$$

$$\psi_{L,d,BF} = (s - (-4 + j2,4))(s - (-4 - j2,4)) = s^2 + 8s + 21,76$$

$$det(sI - A + LC) = det\left(s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = s^2 + (l_1 + 5)s + 3l_0 + 2l_1 + 6$$

$$det(sI - A + LC) = \psi_{L,d,BF} \Rightarrow \begin{cases} l_1 + 5 = 8 \\ 3l_0 + 2l_1 + 6 = 21,76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 3 \\ l_0 = 3,2533 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 \\ 3,2533 \end{bmatrix}$$

5. Exercice 5

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

1. Quel est le type de Système ?

2. Vérifier la stabilité de système en boucle ouverte.
3. Vérifier la commandabilité de système.
4. Déterminer le correcteur par retour d'état de sorte que le système corrigé (en boucle fermée) ait les pôles $-2-j\,2\sqrt{3}$, $-2+j\,2\sqrt{3}$.
5. Vérifier l'observabilité de système
6. Déterminer l'observateur d'ordre totale tel que les pôles désirés sont cinq (5) fois plus grand que les pôles en BF.

Solution

- On a un système mono-variable (SISO)
- Les pôles de système sont les valeurs propres de la matrice d'état A

$$det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow det\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \ \lambda_2=-2$$

On a un pôle égale à zéro alors le système est instable en boucle ouverte

- Pour vérifier la commandabilité de système on suit les étapes suivantes :

$$We_{com}=[B \quad AB]=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 4 & -8\end{bmatrix}$$
$$det(We_{com})=-16\neq 0 \Rightarrow rang(We_{com})=2=n$$

Alors le système est commandable

- Pour chercher le correcteur d'état qui permet de stabiliser le système en boucle fermée, on peut utiliser la méthode directe :

$$det(sI-A+BK)=\psi_{d,BF}$$
$$\psi_{d,BF}=(s-(-2-j\,2\sqrt{3}))(s-(-2+j\,2\sqrt{3}))=s^2+4s+16$$
$$det(sI-A+BK)=det\left(s\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_0 & k_1\end{pmatrix}\right)=s^2+(4k_1+2)s+4k_0$$
$$det(sI-A+BK)=\psi_{d,BF} \Rightarrow \begin{cases}4k_0=16\\ 4k_1+2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_0=4\\ k_1=1/2\end{cases} \Rightarrow K=[4 \quad \tfrac{1}{2}]$$

- Vérification d'observabilité de système

$$W_{obs}=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$det(W_{obs})=1\neq 0 \Rightarrow rang(W_{obs})=2=n$$

Alors le système est observable.

- Détermination de l'observateur d'ordre totale avec des pôles désirés sont cinq (5) fois plus grand que les pôles en BF

$$\lambda_1 \times 5 = (-2 - j2\sqrt{3}) \times 5 = -10 - j10\sqrt{3}$$
$$\lambda_2 \times 5 = (-2 + j2\sqrt{3}) \times 5 = -10 + j10\sqrt{3}$$
$$\psi_{L,d,BF} = (s - (-10 - j10\sqrt{3}))(s - (-10 + j10\sqrt{3})) = s^2 + 20s + 400$$

Calcul de gain de l'observateur L

$$det(sI - A + LC) = det\left(s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = s^2 + (l_0 + 2)s + 2l_0 + l_1$$

$$det(sI - A + LC) = \psi_{L,d,BF} \Rightarrow \begin{cases} l_0 + 2 = 20 \\ 2l_0 + l_1 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_0 = 18 \\ l_1 = 364 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 18 \\ 364 \end{bmatrix}$$