Travaux dirigés Systèmes linéaires multivariables

1.0

Master 1 Automatique & systèmes

Dr. Abdelkader Merah

30/12/2019

Table des matières

Représentation d'état des systèmes multi-variables définis par leurs matrice de transfert

I

A. Exercices d'application

1. Exercice 1 (Passage d'une représentation d'état à la représentation par matrice de transfert)

Soit le système multi-variable défini par :

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}7 & -8\\ -12 & 14\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 6 & 7\end{pmatrix}x$$

Donner la représentation par matrice de transfert de ce système

Solution

$$\begin{pmatrix} (sI-A) & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & s+2 & 12 & -14 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a un système multi-variables avec deux entrées et deux sorties

$$m_{11} = \frac{T_{123}^{123}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 & -7 \\ 0 & s+2 & 12 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{-47s+2}{(s+1)(s+2)} \qquad m_{12} = \frac{T_{124}^{123}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 8 \\ 0 & s+2 & -14 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{56s}{(s+1)(s+2)}$$

$$m_{21} = \frac{T_{123}^{124}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 & -7 \\ 0 & s+2 & 12 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{-42s}{(s+1)(s+2)} \qquad m_{22} = \frac{T_{124}^{124}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 8 \\ 0 & s+2 & -14 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{50s+2}{(s+1)(s+2)}$$

Finalement :

$$M(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{-47s+2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{56s}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-42s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{50s+2}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$$

2. Exercice 2 : (Méthode de Gilbert , Système propre)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)}$$

1. Quel est le type des pôles des ce système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

Les pôles $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ sont des pôles réels et simple, Alors on utilise la méthode de Gilbert pour trouver la représentation d'état, c.t.d trouver les matrices A,B, C et D.

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}}{s^2+3s+3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut décomposé la matrice de transfert de la façon suivante :

$$G(s)=\frac{M_1}{s+1}+\frac{M_2}{s+2}=\frac{\begin{pmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{pmatrix}}{s+1}+\frac{\begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix}}{s+2}$$

Avec

$$\begin{cases} m_{11}^1=\lim\limits_{s\to -1}\dfrac{-47s+2}{s+1}=49 \\ m_{21}^1=\lim\limits_{s\to -1}\dfrac{-42s}{s+1}=42 \\ m_{12}^1=\lim\limits_{s\to -1}\dfrac{56s}{s+1}=-56 \\ m_{22}^1=\lim\limits_{s\to -1}\dfrac{50s+2}{s+1}=-48 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} m_{11}^2=\lim\limits_{s\to -2}\dfrac{-47s+2}{s+2}=-96 \\ m_{21}^2=\lim\limits_{s\to -2}\dfrac{-42s}{s+2}=-84 \\ m_{12}^2=\lim\limits_{s\to -2}\dfrac{56s}{s+2}=112 \\ m_{22}^2=\lim\limits_{s\to -2}\dfrac{50s+2}{s+2}=98 \end{cases}$$

Se qui donne :

$$G(s)=\frac{\begin{pmatrix} 49 & -56 \\ 42 & -48 \end{pmatrix}}{s+1}+\frac{\begin{pmatrix} -96 & 112 \\ -84 & 98 \end{pmatrix}}{s+2}$$

$$M_1=\begin{pmatrix} 49 & -56 \\ 42 & -48 \end{pmatrix}=C_1 B_1=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -8 \end{pmatrix}$$
$$M_2=\begin{pmatrix} -96 & 112 \\ -84 & 98 \end{pmatrix}=C_2 B_2=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 14 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\underline{u} \\ \underline{y}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\underline{x}+D\,\underline{u} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -12 & 14 \end{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

3. Exercice 3: (Méthode de Gilbert)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s(s+1)}$$

1. Quel est le type des pôles des ce système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

On a $s(s+1)=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0 \;\; et \;\; \lambda_2=-1$ alors, les pôles sont réels et simple dans ce cas la on applique la méthode de Gilbert.

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s^2+s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+4s+1)-(s^2+s) & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s^2+s} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s^2+s} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La décomposition en élément simple donne :

$$\frac{\begin{bmatrix} 3s+1 & s \\ 4s & 3s+1 \end{bmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s} + \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}{s+1} = \frac{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{C_1}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{B_1}}{s} + \frac{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{C_2}\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}^{B_2}}{s+1}$$

Finalement

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \underline{x} + D\,\underline{u} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{u} \end{cases}$$

4. Exercice 4: (Méthode de graphe minimal)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}}{(s+2)^2}$$

1. Quel est le type des pôles des ce système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

On a $(s+2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2 \;\; et \;\; \lambda_2 = -2$ alors, les pôles sont des multiples réels dans ce cas la on applique la méthode de graphe minimal.

La décomposition de la matrice de transfert est comme suit :

$$G(s) = \frac{M_1}{(s+2)^2} + \frac{M_2}{s+2} = \frac{\begin{pmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{pmatrix}}{(s+2)^2} + \frac{\begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix}}{s+2}$$

Avec

$$\begin{cases} m_{11}^1 = \lim\limits_{s\to-2} \dfrac{G(s)}{(s+2)^2} = \lim\limits_{s\to-2} (s+3) = 1 \\ m_{21}^1 = \lim\limits_{s\to-2} \dfrac{G(s)}{(s+2)^2} = \lim\limits_{s\to-2} (1) = 1 \\ m_{12}^1 = \lim\limits_{s\to-2} \dfrac{G(s)}{(s+2)^2} = \lim\limits_{s\to-2} (3s+8) = 2 \\ m_{22}^1 = \lim\limits_{s\to-2} \dfrac{G(s)}{(s+2)^2} = \lim\limits_{s\to-2} (s+4) = 2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} m_{11}^2 = \lim\limits_{s\to-2} \left(\dfrac{G(s)}{(s+2)^2}\right)' = \lim\limits_{s\to-2} (s+3)' = \lim\limits_{s\to-2} (1) = 1 \\ m_{21}^2 = \lim\limits_{s\to-2} \left(\dfrac{G(s)}{(s+2)^2}\right)' = \lim\limits_{s\to-2} (1)' = \lim\limits_{s\to-2} (0) = 0 \\ m_{12}^2 = \lim\limits_{s\to-2} \left(\dfrac{G(s)}{(s+2)^2}\right)' = \lim\limits_{s\to-2} (3s+8)' = \lim\limits_{s\to-2} (3) = 3 \\ m_{22}^2 = \lim\limits_{s\to-2} \left(\dfrac{G(s)}{(s+2)^2}\right)' = \lim\limits_{s\to-2} (s+4)' = \lim\limits_{s\to-2} (1) = 1 \end{cases}$$

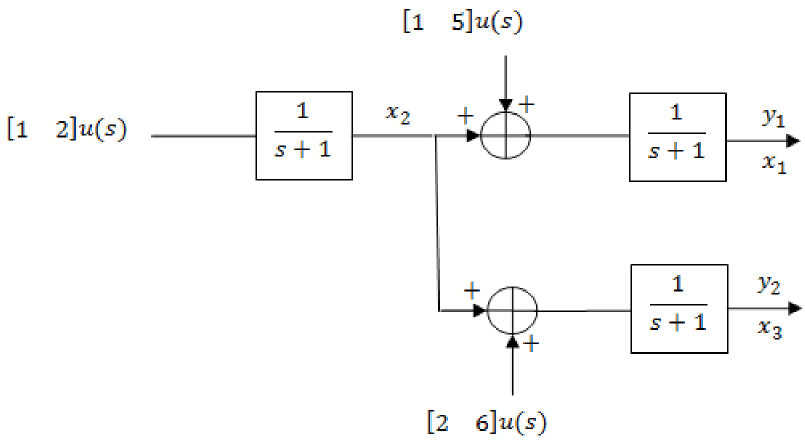
Se qui donne :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}}{u(s)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{(s+2)^2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{s+2}$$

Alors

$$\begin{cases} y_1(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}{(s+2)^2} u(s) + \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}}{s+2} u(s) \\ y_2(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}{(s+2)^2} u(s) + \dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{s+2} u(s) \end{cases}$$

On peut schématiser l'équation précédente comme suit :



D"après cette figure :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{s+2}\left(x_2 + \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} u(s)\right) \\ y_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s x_1 + 2x_1 = x_2 + \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} u(s) \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 + 2x_1 = x_2 + \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} u(s) \\ y_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} u(s) \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{1}{s+2}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} u(s)\right) \Rightarrow s\, x_2 + 2\, x_2 = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} u(s)$$

$$\Rightarrow = \dot{x}_2 = -2\, x_2 + \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} u(s)$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{s+2}\left(x_2 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} u(s)\right) \\ y_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s x_3 + 2x_3 = x_2 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} u(s) \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_3 + 2x_2 = x_2 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} u(s) \\ y_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_3 = -2x_3 + x_2 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} u(s) \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} \dot{\underset{\sim}{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} \end{cases}$$

5. Exercice 5: (Méthode de décomposition en matrices de rang 1)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2+5s+4 & s+5 & 1 \\ 0 & s^2+5s & s \\ 0 & -4s & s^2 \end{pmatrix}}{s^3+5s^2+4s}$$

1. Donner l'ordre de système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

L'ordre de système

$$G(s)=\frac{M(s)}{\Psi(s)}\Rightarrow n=degr\acute{e}e(\Psi(s))\times min(nombre\ d'entr\acute{e}es, nombre\ de\ sorties)$$

$$\Rightarrow n=3\times 3=9$$

$$G(s)=\frac{\begin{pmatrix} s^2+5s+4 & s+5 & 1 \\ 0 & s^2+5s & s \\ 0 & -4s & s^2 \end{pmatrix}}{s^3+5s^2+4s}=\frac{\begin{pmatrix} s^2+5s+4 \\ s+5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s^3+5s^2+4s}+\frac{\begin{pmatrix} s+5 \\ s^2+5s \\ -4s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{s^3+5s^2+4s}+\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{s^3+5s^2+4s}$$

Alors

$$A_1=A_2=A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}\quad et\quad A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad et\quad B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$C_1=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} s^2+5s+4 & \frac{(s^2+5s+4)'}{1!} & \frac{(s^2+5s+4)''}{2!} \\ 0 & \frac{(0)'}{1!} & \frac{(0)''}{2!} \\ 0 & \frac{(0)'}{1!} & \frac{(0)''}{2!} \end{pmatrix}=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} s^2+5s+4 & 2s+5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} s+5 & \frac{(s+5)'}{1!} & \frac{(s+5)''}{2!} \\ s^2+5s & \frac{(s^2+5s)'}{1!} & \frac{(s^2+5s)''}{2!} \\ -4s & \frac{(-4s)'}{1!} & \frac{(-4s)''}{2!} \end{pmatrix}=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} s+5 & 1 & 0 \\ s^2+5s & 2s+5 & 1 \\ -4s & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} 1 & \frac{(1)'}{1!} & \frac{(1)''}{2!} \\ s & \frac{(s)'}{1!} & \frac{(s)''}{2!} \\ s^2 & \frac{(s^2)'}{1:} & \frac{(s^2)''}{2!} \end{pmatrix}=\lim_{s\to 0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ s^2 & 2s & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\underline{\dot{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{u}$$

$$\underline{y}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}$$

6. Exercice 6: (Représentation d'état d'un système MISO)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s)=\frac{\begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \end{bmatrix}}{s^2+3s+3}$$

1. Quel est le type de ce système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

Le système est de type MISO

La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -47 & 56 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underline{u} \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

7. Exercice 7: (Représentation d'état d'un système SIMO)

Considérons le système multi-variables représenté par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s \\ 3s+1 \end{bmatrix}}{s^2+s}$$

1. Quel est le type de ce système
2. Donner la représentation d'état de ce système

Solution

Le système est de type SIMO

La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{u} \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \end{cases}$$