Travaux dirigés Systèmes linéaires multivariables

1.0

Master 1 Automatique

Dr. Abdelkader Merah

30/12/2019

Table des matières

Commandabilité et Observabilité

I

A. Exercices d'application

1. Exercice 1

Soit le système représenté par les équations d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

Modèle 1:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, D = 0$$

Modèle 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

Modèle 3 :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = 0$$

Étudier la commandabilté par retour d'état, de sortie et l'observabilité de chaque système.

Solution

Modèle 1 :

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix},\ D=0$$

Système Mono-variable (SISO), L'ordre de système n =2 (nombre des variables d'état) et le nombre des sortie p=1 ;

$$W_{com}=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$rang\left(W_{com}\right)=rang\left(\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}\right)=rang\left(\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$det\left(W_{com}\right)=0\Rightarrow rang\left(W_{com}\right)=1\neq n$$

Alors, ce modèle est non commandable par retour d'état

$$Ws_{com}=\begin{bmatrix}CB & CAB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -12\end{bmatrix}$$
$$rang\left(Ws_{com}\right)=rang\left(\begin{bmatrix}CB & CAB\end{bmatrix}\right)=rang\left(\begin{bmatrix}6 & -12\end{bmatrix}\right)$$
$$rang\left(Ws_{com}\right)=1=p$$

Alors, ce modèle est commandable par retour de sortie

$$W_{obs}=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -6 & -2\end{bmatrix}$$
$$det\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -6 & -2\end{bmatrix}\right)=6\neq 0\Rightarrow rang\left(W_{obs}\right)=2=n$$

Alors, ce modèle est observable

Modèle 2 :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ D=0$$

Système Mono-variable (SISO), L'ordre de système n =3 (nombre des variables d'état) et le nombre des sortie p=1

$$W_{com}=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -3 & 7\end{bmatrix},\ det(W_{com})=-1\neq 0\Rightarrow rang(W_{com})=3=n$$

$$W_{com}=\begin{bmatrix}CB & CAB & CA^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\end{bmatrix},\ rang(W_{com})=1=p$$

$$W_{obs}=\begin{bmatrix}C & CA & CA^2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix},\ det(W_{obs})=3\Rightarrow rang(W_{com})=3=n$$

Alors, ce modèle est commandable par retour d'état, commandable par retour de sortie et observable

Modèle 3 :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix},D=0$$

Système Multi-variable (MIMO), L'ordre de système n =3 (nombre des variables d'état) et le nombre des sortie p=2 ;

$$W_{com}=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & -4 & 4 & 8\\ 2 & 1 & -6 & -3 & 18 & 9\end{bmatrix},\ det(W_{com}\times W_{com}^T)=det\left(\begin{bmatrix}6 & 21 & 39\\ 21 & 105 & 172\\ 39 & 172 & 455\end{bmatrix}\right)=30522\neq 0$$

$$W_{com}=\begin{bmatrix}CB & CAB & CA^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5 & -15 & -11 & 41 & 27\\ 14 & 10 & -35 & -22 & 97 & 56\end{bmatrix},\ rang(W_{com})=2=p$$

$$W_{obs}=\begin{bmatrix}C & CA & CA^2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ -1 & -2 & -6\\ -3 & -2 & -15\\ 1 & 4 & 18\\ 3 & 4 & 45\end{bmatrix},\ det(W_{obs}^T\times W_{obs})=det\left(\begin{bmatrix}30 & 28 & 211\\ 28 & 42 & 301\\ 221 & 301 & 2639\end{bmatrix}\right)=21199\neq 0$$

Alors, ce modèle est commandable par retour d'état, commandable par retour de sortie et observable

2. Exercice 2

Soit le système représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\dddot{y}(t)+6\ddot{y}(t)+11\dot{y}(t)+6y(t)=6u(t)$$

1. Trouver la fonction de transfert de ce système
2. Quelle est le types des pôles de ce système
3. Donner la représentation d'état sous la forme Compagne de Commande
4. La représentation d'état sous la forme Compagne d'Observation

Solution

La fonction de transfert de ce système est donnée par :

$$L^{-1}\left(\dddot{y}(t)+6\ddot{y}(t)+11\dot{y}(t)+6y(t)=6u(t)\right) \Rightarrow s^3Y(s)+6s^2Y(s)+11sY(s)+6Y(s)=6U(s)$$
$$\Rightarrow (s^3+6s^2+11s+6)Y(s)=6U(s) \Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

On peut récris l'équation caractéristique de système comme suit :

$$S^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)=0$$

Alors les pôles de système sont des pôles réels et simples $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$

Représentation d'état sous la forme Compagne de Commande

$$G(s)=\frac{b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\begin{cases}\dot{\underline{X}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\underline{X}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}U\\ Y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m\end{bmatrix}\underline{X}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\underline{X}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\underline{X}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}U\\ Y=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}\underline{X}\end{cases}$$

Représentation d'état sous la forme Compagne d'Observation

$$\begin{cases}\dot{\underline{X}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\underline{X}+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{bmatrix}U\\ Y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}\underline{X}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\underline{X}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}\underline{X}+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}U\\ Y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{X}\end{cases}$$

3. Exercice 3

Soit le système suivant :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, D=0$$

1. Récrier le système sous la forme Compagne de Commande.
2. Récrier le système sous la forme Compagne d'Observation.

Solution

La fonction de transfert de système est donnée par :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2s}{s^2+3s+2}\Rightarrow\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s}{s^2+3s+2}$$

Représentation d'état sous la forme Compagne de Commande

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}b_0 & b_1\end{bmatrix}, D=0$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}, D=0$$

Représentation d'état sous la forme Compagne d'Observation

$$A=\begin{bmatrix}0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, D=0$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, D=0$$