Travaux dirigés Systèmes linéaires multivariables

1.0

Master 1 Automatique & systèmes

Dr. Abdelkader Merah

30/12/2019

Table des matières

Représentation d'état des systèmes multivariables (SM)

I

A. Exercices d'application

1. Exercice 1 : (Passage d'un système différentiel vers l'espace d'état)

Soit le système à deux entrées et deux sortie défini par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 2u_1 - 3\dot{y}_1 + 4y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\dot{y}_1 + 2y_2 + u_2 \end{cases}$$

- Écrire les équations d'état et de sortie en considérant comme variable d'état :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

- Donner l'ordre de système

Solution

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = -3\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{u}_1 \\ \dot{x}_3 = \dot{y}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = -x_2 + 2\mathrm{x}_3 + u_2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

Finalement la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

L'ordre de système c'est le nombre des lignes (ou colonnes) de la matrice d'état (A) n=4

2. Exercice 2 : (Résolution de l'équation d'état)

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

1. Trouver la matrice de transition e^{At} .
2. Trouver la solution de l'équation d'état quand $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $u(t) = e^{-t}$.
3. Trouver la réponse de système quand $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$

Solution

La matrice de transition est donner par :

$$e^{At}=L^{-1}(sI-A)^{-1}=L^{-1}\left(s\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=L^{-1}\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}{(s+1)}+\frac{\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}}{(s+2)}\right)$$

Avec

$$a_{11}=\lim_{s\to-2}\frac{s+3}{s+1}=-1,\ a_{12}=\lim_{s\to-2}\frac{1}{s+1}=-1$$

$$a_{21}=\lim_{s\to-2}\frac{-2}{s+1}=2,\ a_{22}=\lim_{s\to-2}\frac{s}{s+1}=2$$

$$b_{11}=\lim_{s\to-1}\frac{s+3}{s+2}=2,\ b_{12}=\lim_{s\to-1}\frac{1}{s+2}=1$$

$$b_{21}=\lim_{s\to-1}\frac{-2}{s+2}=-2,\ b_{22}=\lim_{s\to-1}\frac{s}{s+2}=-1$$

Alors

$$e^{At}=L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}}{(s+1)}+\frac{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}}{(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}}{(s+1)}\right)+L^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}}{(s+2)}\right)$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}e^{-2t}$$

La solution de l'équation d'état est donnée par :

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

On commence par le calcul de :

$$e^{A(t-\tau)}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}e^{-(t-\tau)}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}e^{-2(t-\tau)}$$

Ensuite

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}e^{-(t-\tau)}+\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}e^{-2(t-\tau)}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-(t-\tau)}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2(t-\tau)}\right)e^{-\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t+\tau}\right)d\tau=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\left|\tau e^{-t}\right|_0^t+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\left|e^{-2t+\tau}\right|_0^t$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}te^{-t}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)=\begin{pmatrix}-te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\\2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Puis

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}e^{-2t}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\\2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}\right)+\begin{pmatrix}-te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\\-2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}-te^{-t}+e^{-2t}\\-2te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Finalement la réponse de système est donnée par :

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-te^{-t}+e^{-2t}\\-2te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\end{pmatrix}=-te^{-t}+e^{-2t}$$