Travaux dirigés Systèmes linéaires multivariables

1.0

Master 1 Automatique
& systèmes

DR. ABDELKADER MERAH

30/12/2019

Table des matières

Rappel sur le calcul matriciel

I

A. Exercices d'application

1. Exercice 1 : (Rappel sur le calcul matriciel)

Soit la matrice suivante :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A+A)$, $2A$ et A^2 .
2. Calculer le déterminant, le rang, l'inverse, les mineurs principaux et les valeurs propres de la matrice A .

Solution

$$A+A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$2\mathrm{A}=2\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0\times0+1\times0+2\times1) & (0\times1+1\times1+2\times2) & (0\times2+1\times3+2\times1) \\ (0\times0+1\times0+3\times1) & (0\times1+1\times1+3\times2) & (0\times2+1\times3+3\times1) \\ (1\times0+2\times0+1\times1) & (1\times1+2\times1+1\times2) & (1\times2+2\times3+1\times1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_i)$$

$$= 0 \times det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \times det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$det(A) = 1 \neq 0, Alors\ rang(A) = l'ordre\ de\ système\ (n) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ m_3 = det(A) = 1 \end{cases}$$

$$det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & (1-\lambda) & 3 \\ 1 & 2 & (1-\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow = -\lambda \times det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 3 \\ 2 & (1-\lambda) \end{pmatrix} - 0 \times det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & (1-\lambda)1 \end{pmatrix} + 1 \times det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ (1-\lambda) & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1.7240 \\ \lambda_2 = -0.1497 \\ \lambda_3 = 3.8737 \end{cases}$$

2. Exercice 2 : (Fonction de transfert, représentation d'état)

Soit un moteur à courant continu commandé par un induit et généré par l'équation différentielle suivante :

$$J\ddot{\theta}(t)+\left(f+\frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta}(t)=\frac{K}{R}e(t)$$

Avec

θ : Position angulaire	f : Coefficient de frottement
R : Résistance de l'induit	K : Constante d'induction
J : Coefficient d'inertie	

Tableau 1 Paramètres de MCC

1. Donner la fonction de transfert de système.
2. Donner la représentation d'état du système en choisissons comme variables d'état la position et la vitesse.

Solution

En utilisant la transformé de Laplace, on peut trouver la fonction de transfert de notre système :

$$L\left(J\ddot{\theta}(t)+\left(f+\frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta}(t)=\frac{K}{R}e(t)\right)=J\,s^2\theta(s)+\left(f+\frac{K^2}{R}\right)s\theta(s)=\frac{K}{R}E(s)$$

$$\Rightarrow\theta(s)\left[J\,s^2+\left(f+\frac{K^2}{R}\right)s\right]=\frac{K}{R}E(s)\Rightarrow\frac{\theta(s)}{E(s)}=\frac{\frac{K}{R}}{J\,s^2+\left(f+\frac{K^2}{R}\right)s}$$

Pour la représentation d'état :

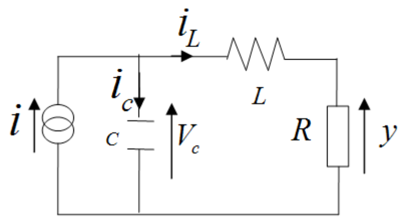
$$\begin{cases}x_1=\theta(t)\\x_2=\dot{\theta}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{\theta}(t)=x_2\\\dot{x}_2=\dot{\theta}(t)=\frac{1}{J}\left(-\left(f+\frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta}(t)+\frac{K}{R}e(t)\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=\dot{\theta}(t)=\frac{-\left(f+\frac{K^2}{R}\right)}{J}x_2+\frac{K}{JR}e(t)\end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & \frac{-\left(f+\frac{K^2}{R}\right)}{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{K}{JR}\end{pmatrix}e(t)$$

3. Exercice 3 : (Fonction de transfert, représentation d'état)

Soit le système représenté par la figure suivante :



1. Donner la représentation d'état et de sortie en considérant $x(t)=\begin{bmatrix} V_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$
2. Trouver la fonction de transfert de système

Solution

En utilisant les lois de *Kirchhoff* (loi des nœuds et loi des mailles)

$$\begin{cases} i=i_L+i_c \\ i_c=c\dfrac{dV_c}{dt} \\ V_c=L\dfrac{di_L}{dt}+Ri_L \\ y=Ri_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_c}{dt}=\dfrac{1}{c}(i-i_L) \\ \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{1}{L}V_c-\dfrac{R}{L}i_L \\ y=Ri_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=\dfrac{1}{c}(i-x_2) \\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{L}x_1-\dfrac{R}{L}x_2 \\ y=Rx_2 \end{cases}$$

Donc la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{c} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{-R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{c} \\ 0 \end{pmatrix}i \\ y=\begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} D=0 \end{cases}$$

La fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Y(s)}{i(s)}=C(sI-1)^{-1}B+D=\begin{pmatrix}0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & \frac{1}{c}\\ \frac{-1}{L} & s+\frac{R}{L}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & R\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}s+\frac{R}{L} & \frac{-1}{c}\\ \frac{1}{L} & s\end{pmatrix}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\\ 0\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}\frac{R}{L} & Rs\end{pmatrix}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\frac{R}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}}\Rightarrow\frac{Y(s)}{i(s)}=\frac{\frac{R}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}}$$

4. Exercice 4 : (Les systèmes (MIMO, SISO, MISO ou SIMO))

Soit le système représenté suivant :

$$\begin{cases}\acute{X}=AX+BU\\ Y=CX+DU\end{cases}$$

Avec

$$Sys1: \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}, D=0$$

$$Sys2: \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}, D=0$$

$$Sys3: \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}, D=0$$

$$Sys4: \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\2 & 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}, D=0$$

$$Sys5: \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\2 & 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}, D=0$$

1. Donner dans chaque cas le type de système (MIMO, SISO, MISO ou SIMO), l'ordre de système, le nombre des entrées, le nombre des sorties

Solution

- Système 1 : L'ordre de système (ou nombre des variables d'état) n=3, Nombre d'entrées=1, Nombre de sorties=1. le type est "SISO".
- Système 1 : L'ordre de système (ou nombre des variables d'état) n=3, Nombre d'entrées=2, Nombre de sorties=2. le type est "MIMO".
- Système 1 : L'ordre de système (ou nombre des variables d'état) n=3, Nombre d'entrées=1, Nombre de sorties=2. le type est "SIMO".
- Système 1 : L'ordre de système (ou nombre des variables d'état) n=3, Nombre d'entrées=2, Nombre de sorties=3. le type est "MIMO".
- Système 1 : L'ordre de système (ou nombre des variables d'état) n=3, Nombre d'entrées=2, Nombre de sorties=1. le type est "MISO".