

Formulaire de trigonométrie ♥

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

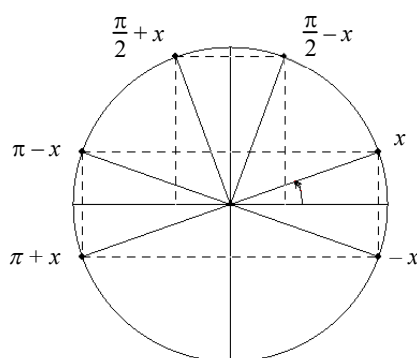
III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

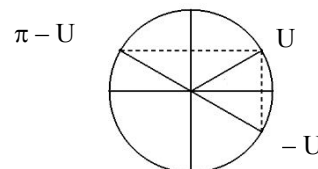
$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

IV – Equations trigonométriques :

$$\cos U = \cos V \Leftrightarrow (U \equiv V [2\pi] \text{ ou } U \equiv -V [2\pi])$$

$$\sin U = \sin V \Leftrightarrow (U \equiv V [2\pi] \text{ ou } U \equiv \pi - V [2\pi])$$

$$\tan U = \tan V \Leftrightarrow U \equiv V [\pi]$$

**V – Formules d'addition et de duplication**

Formules d'addition.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ & \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ & \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

Lorsque $\tan(a+b)$ existe,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Formules de duplication.

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \\ & \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \\ & \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) \end{aligned}$$

VI – Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

VII- Transformation de produit en somme:

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

VIII- Transformation de somme en produit:

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin a + \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \sin a - \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

IX – Utilisation de l'angle moitié

- $\forall a \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \text{ et } 1 - \cos a = 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$
- Si $a \neq \pi (2\pi)$ alors $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ existe et on a

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et lorsque } a \neq \frac{\pi}{2} (\pi), \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

X – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

On pose $Z = a+ib$, et $r = \sqrt{a^2+b^2}$, on a $Z = r e^{i\theta}$ et donc $a \cos x + b \sin x = r(\cos\theta \cos x + \sin\theta \sin x) = r \cos(x - \theta)$

Exemple: $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

XI – Linéarisation de $\cos^p a \cdot \sin^q a$:

On utilise les formules d'Euler : $\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \text{ et } \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$

On remplace puis développe en utilisant la formule du binôme, enfin on regroupe les termes pour faire apparaître des $\cos(ka)$ et $\sin(ka)$ grâce aux formules d'Euler.

Exemples : $\cos^3 a = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} \cos(3a) + \frac{3}{4} \cos a$ et $\sin^3 a = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3a) + \frac{3}{4} \sin a$

XII – Expression de $\cos(na)$ ou $\sin(na)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$:

On utilise la formule de Moivre: $(\cos a + i \sin a)^n = \cos(na) + i \sin(na)$

On développe le membre de gauche en utilisant la formule du binôme puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Exemples: $\cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$ et $\sin(3a) = 4 \sin^3 a - 3 \sin a$