

Tutorial exercises set 1: Analysis 1

Exercise 01:

A) Show the following inequalities:

بيّن المتراجحات التالية:

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$
3. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}; \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

B) Let $[x]$ be the floor function of x ;

- find the following: $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8].$

لتكن $[x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x ، أوجد ما يلي: $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8].$

- Demonstrate that for all $x, y \in \mathbb{R}$:

برهن أنه من أجل كل x و y ينتميان إلى $\mathbb{R}$:

1. $[x + m] = [x] + m$ where $m \in \mathbb{Z}$
2. $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|.$
3. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$

Exercise 02:

A) Show that:

بيّن أن:

1. The sum of a rational number and an irrational number is an irrational number.
1. مجموع عدد حقيقي (نسبي) و عدد أصم هو عدد أصم (غير نسبي) هو عدد أصم (غير نسبي) .

2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$

B) Let $a \in [1, \infty[$ simplify $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}.$

ليكن $a \in [1, \infty[$ بسط $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}.$

Exercise 03:

Consider A as a subset of $\mathbb{R}$ equipped with the usual order. Determine, for each of the following sets: the set of upper bounds $Maj(A)$, the set of lower bounds $Min(A)$, the supremum $\sup(A)$, the infimum $\inf(A)$, the smallest element $\min(A)$, and the largest element $\max(A)$.

نعتبر A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ معتمدة الترتيب العادي، عين لكل من المجموعات التالية: مجموعة الحدود العليا

$Maj(A)$ ، مجموعة الحدود السفلية $Min(A)$ ، الحد الأعظمي (الحد من الأعلى) $\sup(A)$ ، الحد الأصغري (الحد من

الأسفل) $\inf(A)$ ، العنصر الأصغري $\min(A)$ ، والعنصر الأعظمي $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[- \alpha, \alpha[$ (where $\alpha > 0$), $E = \mathbb{R}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}, E = \mathbb{R}$.
3. $A = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}, E = \mathbb{R}$.

Exercise 04:

Let A be a non-empty and bounded subset of $\mathbb{R}$. We denote $B = \{|x - y|; (x, y \in A^2)\}$.

1. Justify that B is bounded above.
2. We denote $\sup(B)$ as the supremum of the set B , show that $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

لتكن A مجموعة جزئية غير فارغة ومحصورة في $\mathbb{R}$. نرمز $B = \{|x - y|; (x, y \in A^2)\}$.
 1. علل كون B محصورة من الأعلى.
 2. نرمز للحد الأعظمي للمجموعة B بـ $\sup(B)$. أثبت أن $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercise 05:

In notation, $P_B(\mathbb{R})$ represents the set of bounded subsets of $\mathbb{R}$. Show that for all $A, B \in P_B(\mathbb{R})$.

الرمز $P_B(\mathbb{R})$ يمثل مجموعة المجموعات الجزئية المحصورة في $\mathbb{R}$. برهن أنه من أجل كل A و B ينتميان لـ $P_B(\mathbb{R})$:

1. (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$,
 (b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$,
2. if $A \cap B \neq \emptyset$ then:
 (a) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
 (b) $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$,
3. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
4. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ where $A + B = \{x + y / x \in A \text{ and } y \in B\}$
 (a) $\sup(-A) = -\inf A$;
 (b) $\inf(-A) = -\sup A$
 such that $-A = \{-x / x \in A\}$.

Exercise 06:

Using the characterization of the supremum and infimum, show that:

باستعمال مميزة الحاد من الأعلى و الحاد من الأسفل، بين أن:

1. $\sup A = \frac{3}{2}, \inf A = 1$ for $A = \{\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\sup B = 2, \inf B = 0$ for $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $\sup C = 1, \inf C = 0$ for $C = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\sup D = -1, \inf D = -2$ for $D = \{\frac{1}{n^2} - 2, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Calculate $\max A, \min A, \max B, \min B, \max C, \min C$, and $\max D, \min D$ if they exist.

أحسب $\max A, \min A, \max B, \min B, \max C, \min C$ ، و $\max D, \min D$ إن وجدوا.