TP2 Technique d'identification

1- La régression linéaire

Exemple : le plus classique, celui de la régression linéaire. En effet, bien souvent, on dispose d'une série de mesures **y** en fonction d'une entrée **u** qui semble linéaire, et l'on souhaite trouver la ***régression linéaire***, c'est à dire l'équation de la droite $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ minimisant l'erreur au sens des moindres carrés. Pour simplifier, nous chercherons l'équation de la droite sous la forme $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{u}$, *a* étant le paramètre inconnu. Ce modèle permet alors de calculer le vecteur **:**

Observation	Commande	Prévision
y_0	u_0	$\widehat{y_0} = au_0$
y_1	u_1	$\widehat{y_1} = au_1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_N	u_N	$\widehat{y_N} = au_N$

Le critère à minimiser est alors, au sens des moindres carrés :

$$J(a) = \frac{1}{2}\left[(y_0 - \widehat{y_0})^2 + (y_1 - \widehat{y_1})^2 + \cdots + (y_N - \widehat{y_N})^2\right]$$

On peut réécrire ce critère sous forme matricielle :

$$J(a) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{Ha})^{\mathbf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{Ha})$$

Avec

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

Chercher le paramètre **a** qui minimise ce critère revient à dériver le critère par rapport à *a*, et à chercher quand il s'annule. La valeur du paramètre qui annulent la dérivée du critère est donnée par :

$$a = (\mathbf{H^T H})^{-1}(\mathbf{y^T H})$$

1- Tracer sur le même graphe y et u

2- Calculer le paramètre **a** par la méthode la régression linéaire
3- Tracer sur le même graphe y et $\hat{y}$

A.N u=1 :N =40 , b= 10*randn(N,1) , a=3.

2- Méthode des moindres carrés

Le principe général de cette méthode est de choisir le jeu de paramètres d'un modèle que l'on définira, de telle sorte qu'il minimise la somme des carrés de la différence entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs observées.

Exercice N1 :

A la suite d'essais, on a choisit pour d´écrire le comportement d'un système dynamique discret, le modèle suivant :

$$y(k)=-ay(k-1) + bu(k-1)$$

D'après des mesures du couple (Entrées, Sorties), on a relevé le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$u(k)$	2	1	4	5
$y(k)$	0	2	2	5

2) Tracer sur le même graphe Y et U
3) Quelle est le type de ce système ?
4) Quelle est le type de ce model ?
5) Calculer les paramètres par la méthode des moindre-carrés (construction de la matrice H puis calcul de la $\hat{\theta}^T$ thêta)
6) Simulation avec les valeurs finales de thêta (trouvez les sorties de model Ym)
7) Tracer sur le même graphe Y et Ym

Exercice N2 :

Au cours d'une expérience, on a relevé les mesures suivantes des entrées/sorties :

k	1	2	3	4
$u(k)$	2	1	4	3
$y(k)$	2	2	5	5.5

On se propose d'identifier un modèle paramétrique de la forme :

$$y(k) = ay(k-1) + b_1u(k) + b_0u(k-1)$$

1. Ecrivez la relation précédente pour chaque instant d'´echantillonnage k.
2. Montrez que ces équations peuvent se mettre sous une forme matricielle de la forme : $y = H\theta$
3. Tracer sur le même graphe Y et U
4. Calculer les paramètres par la méthode des moindre-carrés (construction de la matrice H puis calcul de la $\hat{\theta}^T$ thêta)
5. Simulation avec les valeurs finales de thêta (trouvez les sorties de model Ym)
6. Tracer sur le même graphe Y et Ym

Exercice N3 : soit le système donne par le model suivant :

$$y(k) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} u(k)$$

I On a relevé les mesures suivantes des entrées/sorties :

k	1	2	3	4
u(k)	1	-1	-1	1
y(k)	12	4	-12	-4

Estimer les paramètres $\hat{\theta}^T = [a_1 \quad b_1]$ par la méthode des moindres carres ?

II Faire le même avec les mesures suivantes

k	1	2	3	4
u(k)	1	1	-1	1
y(k)	-4	5	0	-2

Trouver les valeurs de $\hat{y}(k) \quad et\ e(k)$?

Exercice N4 :

A la suite d'essais, on a choisit pour d´écrire le comportement d'un système dynamique discret, le modèle suivant :

$$y(k)=a1y\,(k-1)+a2y\,(k-2)+b1u\,(k-1)+b2u\,(k-2)$$

D'après des mesures du couple (Entrées, Sorties), on a relevé le vecteur suivant :

y=[0.06 1 0.424 1.06 0.543 1.03 0.604 0.99 0.646 0.955]

u (k) est échelon unitaire

I Estimer les paramètres $\hat{\theta}^T$ par la méthode des moindres carres simple ?
II Estimer les paramètres $\hat{\theta}^T$ par la méthode des moindres carres récursives ?