

Solutions des exercices du TD 3

Solution de l'exercice 1 : 1) Un calcul très simple nous donne

$$\begin{aligned} 2C - D &= 2 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 16 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 13 \\ 11 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 25 & 43 \\ 11 & 35 & -15 \\ 26 & 0 & 25 \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 39 & 24 \\ 24 & 41 & 48 \\ 44 & 11 & 18 \end{pmatrix},$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Tr}(B) = -4 + 1 = -3, \quad \text{Tr}(D) = 2 + (-3) + 2 = 1.$$

2) On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \times 4 - 3 \times 2 = -10,$$

$$\begin{aligned} \det(D) &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-34) - 4 \times 3 - 1 \times 23 \\ &= -103. \end{aligned}$$

3) On obtient facilement

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 10 \times I_2.$$

D'où,

$$A \times \frac{1}{10}B = I_2.$$

On en déduit que la matrice A est inversible, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{10}B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2 : On a

$$\begin{aligned} A^3 = 3A^2 - 5A + 2I &\iff A^3 - 3A^2 + 5A = 2I \\ &\iff A(A^2 - 3A + 5I) = 2I \\ &\iff A \times \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 5I) = I. \end{aligned}$$

On en déduit que A est inversible et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 5I).$$

Solution de l'exercice 3 : 1) Calculons l'inverse de la matrice A . On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 16 = 8. \end{aligned}$$

Comme $\det A \neq 0$ alors A est inversible, ainsi A^{-1} existe et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^tC$$

où C est la comatrice de A ,

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{12} & +D_{13} \\ -D_{21} & +D_{22} & -D_{23} \\ +D_{31} & -D_{32} & +D_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -8 \\ -4 & 4 & -4 \\ 12 & -8 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tC = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 12 \\ 8 & 4 & -8 \\ -8 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^tC = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 12 \\ 8 & 4 & -8 \\ -8 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

2) On a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x - 2z = 2 \\ -4x + 6y + 8z = 4 \\ 2y + 2z = 6 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 2x - 2z \\ -4x + 6y + 8z \\ 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &\iff A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &\iff I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 12 \\ 8 & 4 & -8 \\ -8 & -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 48 \\ -16 \\ 40 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 : 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

On a $f(1, 0) = (3, 2, 5)$ et $f(0, 1) = (-1, 4, -6)$. D'où

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x - 2y + 5z, 2x + y - 7z, 4x - 6y)$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

On a $f(1, 0, 0) = (3, 2, 4)$, $f(0, 1, 0) = (-2, 1, -6)$ et $f(0, 0, 1) = (5, -7, 0)$. D'où

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 5 : 1) La matrice M de f dans la base canonique B est définie comme suit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x + y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix},$$

ou bien

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y + z, 3x - 2y + z).$$

3) Soient α, β et γ des réels, alors

$$\begin{aligned} \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\implies \alpha(2e_1 + e_2) + \beta(2e_1 - 2e_2) + 2\gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\implies (2\alpha + 2\beta)e_1 + (\alpha - 2\beta)e_2 + 2\gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre alors

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc (e'_1, e'_2, e'_3) est libre, et puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) La matrice de passage P de la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est définie comme suit

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ à la base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
Calculons $\det P$

$$\det P = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

Comme $\det P \neq 0$ alors P est inversible, ainsi P^{-1} existe et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t C$$

où C est la comatrice de P ,

$$C = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

D'où

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad {}^t C = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t C = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5) On a $X = e_1 - e_3$. Donc $X = (1, 0, -1)$ dans la base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Les coordonnées de X dans la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ sont

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Donc $X = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$ dans la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

6) La matrice A associée à f par rapport à la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est donnée par

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}MP \\ &= \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ -6 & 6 & 0 \\ -18 & 12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 \\ -6 & -24 & 0 \\ -24 & -60 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 : 1) La matrice du système (S_1) est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -41 \neq 0.$$

Donc le système linéaire (S_1) admet une seule solution, et on a donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-29}{-41} = \frac{29}{41}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-13}{-41} = \frac{13}{41}. \end{aligned}$$

2) La matrice du système (S_2) est

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Donc le système linéaire (S_2) admet une seule solution, et on a donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\det(B)} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7}.$$

3) La matrice du système (S_3) est

$$C = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & -6 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & -6 \end{vmatrix} = 12 - 4i \neq 0$$

Donc le système linéaire (S_3) admet une seule solution, et on a donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3+i & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1+i \\ 3i & 1-i & -6 \end{vmatrix}}{\det(C)} = \frac{39+i}{12-4i} = \frac{29}{10} + \frac{21}{20}i,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2i & -3+i & 0 \\ 2 & 6 & 1+i \\ 0 & 3i & -6 \end{vmatrix}}{\det(C)} = \frac{-30-54i}{12-4i} = -\frac{9}{10} - \frac{24}{5}i,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2i & 1 & -3+i \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1-i & 3i \end{vmatrix}}{\det(C)} = \frac{-16-10i}{12-4i} = -\frac{19}{20} - \frac{23}{20}i.$$