

Fiche Td 7: Matrices et systèmes d'équations linéaires
Applications linéaires

Exercice 1

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $2C - D$, CD , C^2 , tA , tC , $\text{Tr}(B)$, $\text{Tr}(D)$.
2. Calculer $\det(A)$ et $\det(D)$.
3. Calculer AB et en déduire A^{-1} .

Exercice 2

Soit A une matrice carrée telle que $A^3 = 3A^2 - 5A + 2I$ où I est la matrice identité. Montrer que A est inversible et donner son inverse A^{-1} .

Exercice 3

1. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. À l'aide de l'inverse de la matrice A , résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2z = 2 \\ -4x + 6y + 8z = 4 \\ 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 4

Trouver la matrice M associée à chacune des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x - 2y + 5z, 2x + y - 7z, 4x - 6y)$

Exercice 5

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{aligned}f(e_1) &= e_1 - e_2 + 3e_3 \\f(e_2) &= -e_1 + e_2 - 2e_3 \\f(e_3) &= 2e_1 + e_2 + e_3\end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique B .
2. Déterminer l'application linéaire f associée à M .
3. Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$e'_1 = 2e_1 + e_2, \quad e'_2 = 2e_1 - 2e_2, \quad e'_3 = 2e_3$$

Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de passage de B à B' , en déduire la matrice de passage de B' à B .
5. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = e_1 - e_3$. Trouver ses coordonnées dans la base B' .
6. Déterminer la matrice A associée à f par rapport à la base B' .

Exercice 6

En utilisant la méthode de Cramer, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}(S_1) \quad & \begin{cases} 5x - 8y = 1 \\ -7x + 3y = -4 \end{cases} \\(S_2) \quad & \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = -1 \\ 2x - 4y + 5z = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} 2ix + y = -3 + i \\ 2x + (1 + i)z = 6 \\ (1 - i)y - 6z = 3i \end{cases} \quad \text{avec } i^2 = -1$$